



**QUADRO DI RIFERIMENTO  
SECONDO CICLO DI ISTRUZIONE  
PROVA DI MATEMATICA**

## PREMESSA

Questo documento esplicita il Quadro di Riferimento per la costruzione della prova di matematica per il Servizio di Valutazione Nazionale dell'INVALSI per il secondo ciclo di istruzione.

Presenta i principali punti di riferimento concettuali, i collegamenti con le indicazioni di legge, le idee chiave che guidano la progettazione delle prove. In particolare, esplicita

- gli ambiti della valutazione, cioè quali aspetti della matematica appresa vengono valutati
- i modi della valutazione, ossia le caratteristiche dello strumento di valutazione.

A questo proposito va ricordato che si tratta di un quadro di riferimento per la *valutazione* del sistema di istruzione italiano e quindi è stato redatto coerentemente al quadro generale nel quale sono formulati i curricoli della scuola italiana, partendo dalle indicazioni di legge attualmente in vigore.

I quadri di riferimento per il primo e secondo ciclo sono documenti pensati in un'ottica di continuità. È pertanto naturale che i due documenti abbiano in comune alcune parti generali e che il Quadro di Riferimento per il secondo ciclo rimandi a quello per il primo ciclo nella definizione degli apprendimenti oggetto di valutazione. Diversi sono infatti gli apprendimenti valutati nel secondo ciclo che sono già presenti in forma più o meno sistemata nel primo ciclo.

È bene sottolineare, inoltre, che entrambi i documenti devono essere pensati in costante evoluzione.

### 1. A chi si rivolge il Quadro di Riferimento.

Il Quadro di Riferimento si rivolge in primo luogo alle persone che propongono i quesiti e al gruppo di lavoro che li elabora, ne segue il pretest sul campo e con esso compone i fascicoli delle prove. Indica i vari aspetti dell'apprendimento da valutare e stabilisce un equilibrio tra i diversi ambiti. È quindi uno strumento che viene utilizzato nella fase preparatoria dei questionari.

Il Quadro di Riferimento, inoltre, è uno strumento che aiuta gli insegnanti a *interpretare i risultati* ottenuti dalle singole classi nelle prove del Servizio Nazionale di Valutazione. Le *prove INVALSI* sono progettate per avere informazioni campionarie sui livelli di apprendimento degli studenti italiani e quindi sul funzionamento del sistema di istruzione italiano e possono costituire un elemento molto efficace se inserite nel processo di autovalutazione degli insegnanti. La comparazione dei risultati delle proprie classi o della propria istituzione scolastica con gli esiti complessivi delle prove, interpretati alla luce della conoscenza del contesto specifico in cui la propria scuola opera, può servire per individuare i punti di forza e di debolezza del percorso effettivamente realizzato in classe e delle scelte didattiche effettuate; può inoltre aiutare il coordinamento all'interno delle singole istituzioni scolastiche. I diversi *benchmark* proposti, elaborati partendo dal campione statistico, possono costituire un termine di confronto per le singole scuole o anche per i singoli insegnanti, allo scopo di condurre una riflessione autonoma (che tenga conto delle caratteristiche del contesto in cui si opera) sia sugli apprendimenti raggiunti dagli allievi (curricolo raggiunto), sia sulla validità delle scelte didattiche, sulla efficacia dell'offerta formativa e infine sulla ampiezza, profondità e coerenza del curriculum effettivamente svolto (curricolo effettivo) e sulla loro corrispondenza con il curriculum programmato.

Il Quadro di Riferimento può anche essere adoperato dai responsabili ai diversi livelli (Ministero dell'Istruzione, Uffici Scolastici Regionali, Dirigenti scolastici) come strumento per interpretare i risultati del sistema nel suo complesso, per poter adottare opportune strategie di intervento- per esempio relativamente alla predisposizione di attività particolari di recupero o rafforzamento per gli allievi-o per intervenire sul curriculum programmato.

Il Quadro di Riferimento, infine, può offrire agli allievi e alle famiglie informazioni utili per capire il significato della valutazione come momento cruciale del percorso scolastico e come momento di verifica del sistema.

Per tutti questi aspetti, un'attenta analisi dei risultati delle prove somministrate potrà contribuire a fornire una guida per migliorare l'offerta del sistema nel suo complesso e di ogni singola istituzione in particolare.

È bene precisare che l'attenzione a progettare ambienti di insegnamento-apprendimento adeguati a consentire agli studenti di effettuare prestazioni soddisfacenti alle prove INVALSI, non deve in alcun modo portare ad addestrare gli studenti ad affrontare tipologie valutative simili: una scelta di questo tipo si tradurrebbe inevitabilmente in un danno per l'insegnamento e per la Scuola. È invece necessario curare la effettiva crescita di quel retroterra cognitivo e culturale di cui le prove INVALSI dovrebbero rilevare e valutare l'esistenza, per poi stimolarne lo sviluppo.

## **2. La definizione degli obiettivi di apprendimento**

La definizione degli obiettivi di apprendimento nel secondo ciclo di istruzione è contenuta, in questo momento, in tre blocchi di documenti normativi. Su di essi è costruita la valutazione del Servizio Nazionale di Valutazione e a essi vengono agganciati i singoli item delle prove –per permettere un corretto posizionamento del risultato della valutazione rispetto al percorso scolastico curricolare.

Il primo blocco è costituito dall'insieme dei documenti relativi all'Obbligo di istruzione, che riguardano tutte le articolazioni del sistema scolastico. La legge 26 dicembre 2006, n.296, ha elevato l'obbligo di istruzione a 10 anni; anche con riferimento alla Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006 l'innalzamento dell'obbligo di istruzione è finalizzato all'acquisizione dei saperi e delle competenze chiave di cittadinanza (asse dei linguaggi, asse matematico, asse scientifico-tecnologico, asse storico-sociale) così come definite nel decreto ministeriale 22-8-2007, n. 139<sup>1</sup>.

Il riferimento alla valutazione per la matematica è quindi costituito dall'asse culturale matematico; in esso si dice che:

*la competenza matematica comporta la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero (dialettico e algoritmico) e di rappresentazione grafica e simbolica (formule, modelli, costrutti, grafici, carte), la capacità di comprendere ed esprimere adeguatamente informazioni qualitative e quantitative, di esplorare situazioni problematiche, di porsi e risolvere problemi, di progettare e costruire modelli di situazioni reali. Finalità dell'asse matematico è l'acquisizione al termine dell'obbligo d'istruzione delle abilità necessarie per applicare i principi e i processi matematici di base nel contesto quotidiano della sfera domestica e sul lavoro, nonché per seguire e vagliare la coerenza logica delle argomentazioni proprie e altrui in molteplici contesti di indagine conoscitiva e di decisione.*

Le quattro competenze di base di questo asse culturale sono così enunciate

1) Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica.

---

<sup>1</sup> I documenti della normativa di riferimento, nonché altri materiali utili attinenti all'obbligo di istruzione, sono reperibili sul sito dedicato <http://www.indire.it/obbligoistruzione/>

- 2) Confrontare e analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.
- 3) Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi.
- 4) Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

I saperi sono articolati in abilità/capacità e conoscenze, con riferimento al sistema di descrizione previsto per l'adozione del Quadro Europeo dei Titoli e delle Qualifiche (EQF)<sup>2</sup>.

Nel momento in cui una domanda è proposta per il Servizio Nazionale di Valutazione, si cerca di esplicitare in che modo tale domanda possa fornire indicazioni significative riguardo a una di queste competenze di base. Queste informazioni vengono raccolte nelle *Guide alla lettura* che accompagnano le prove.

Per quanto riguarda il sistema dei licei, gli obiettivi di apprendimento specifici sono contenuti nel complesso dei documenti delle Indicazioni nazionali<sup>3</sup>. In essi gli obiettivi di apprendimento sono articolati in quattro ambiti (Aritmetica e algebra; Geometria; Relazioni e funzioni; Dati e previsioni). Per ogni domanda proposta per il Servizio Nazionale di Valutazione viene stabilito un collegamento con uno o più di questi obiettivi di apprendimento e queste informazioni sono riportate nelle *Guide alla lettura*.

Per quanto riguarda infine il sistema dell'istruzione tecnica e professionale, il documento di riferimento è costituito dalle Linee Guida, in particolare dall'allegato A, che contiene la declinazione dei risultati di apprendimento in conoscenze e abilità<sup>4</sup>. In esso sono richiamate le competenze di base dell'asse culturale dell'obbligo di istruzione e gli obiettivi di apprendimento sono articolati negli stessi quattro ambiti (Aritmetica e algebra; Geometria; Relazioni e funzioni; Dati e previsioni) utilizzati per le Indicazioni Nazionali per il sistema dei Licei.

Per ogni domanda proposta per il Servizio Nazionale di Valutazione si cerca di stabilire un collegamento con uno o più di questi obiettivi di apprendimento e queste informazioni sono riportate nelle *Guide alla lettura*.

### 3. Le due dimensioni della valutazione

Le domande di matematica delle prove del Servizio Nazionale di Valutazione sono costruite in relazione a due dimensioni:

- i *contenuti matematici* coinvolti, organizzati nei quattro ambiti sopra citati;
- i *processi* coinvolti nella risoluzione.

Questa bi-dimensionalità della valutazione è utilizzata in quasi tutte le indagini<sup>5</sup>, ed è indispensabile

---

2 Il Quadro Europeo dei Titoli e delle Qualifiche è reperibile all'indirizzo [http://ec.europa.eu/education/pub/pdf/general/eqf/broch\\_it.pdf](http://ec.europa.eu/education/pub/pdf/general/eqf/broch_it.pdf)

3 La raccolta completa dei documenti relativi alle Indicazioni Nazionali per il sistema dei Licei è reperibile all'indirizzo <http://nuovilicei.indire.it/>

4 La raccolta completa dei documenti relativi al sistema dell'istruzione tecnica è reperibile all'indirizzo <http://nuovitecnici.indire.it/>; quella per il sistema dei professionali all'indirizzo <http://nuoviprofessionali.indire.it/>

5L'indagine OCSE-PISA utilizza le categorie di *Mathematical Content Knowledge* e di *Mathematical Processes and the Underlying Mathematical Capabilities*; va notato che nel Framework di OCSE-PISA il termine *mathematical process* è utilizzato per descrivere le diverse fasi del ciclo della matematizzazione; quelli che qui sono chiamati processi sono avvicinabili maggiormente alle *capabilities*. Cfr. il seguente paragrafo 4

per fotografare correttamente gli apprendimenti dello studente, individuandone le componenti strutturali.

È importante sottolineare il fatto che (in matematica) non è possibile in generale stabilire una corrispondenza univoca tra il singolo quesito e un unico contenuto o processo il cui possesso venga verificato in esclusiva mediante quello stesso quesito. Infatti, in generale, la risposta a ciascuna domanda coinvolge diversi livelli di conoscenze di vario tipo e richiede contemporaneamente il possesso di diverse abilità. È questa una conseguenza della natura stessa del pensiero matematico, che non consiste solo in convenzioni o procedure di calcolo, ma in ragionamenti complessi, che coinvolgono rappresentazioni, congetture, argomentazioni, deduzioni.

Ogni quesito delle prove del Servizio Nazionale di Valutazione viene quindi riferito a un ambito di contenuti e a un singolo processo, ma va sempre inteso che quelli indicati sono l'ambito e il processo *prevalenti*.

### 3.1 Gli ambiti dei contenuti

In continuità con il QdR per il primo ciclo, gli ambiti di contenuti vengono indicati con *Numeri*, *Spazio e figure*, *Relazioni e funzioni*, *Dati e previsioni*. L'ambito *Numeri* è riconducibile all'ambito *Aritmetica e algebra* delle Indicazioni Nazionali e l'ambito *Spazio e figure* a quello *Geometria*. L'elenco che segue vuole esplicitare i nodi concettuali attorno ai quali vengono costruite le prove.

#### *Numeri*

Numeri naturali, interi e razionali: significati, operazioni (calcolo esatto e approssimato) e proprietà, rappresentazioni e ordinamento sulla retta dei numeri, rappresentazioni sul piano cartesiano.

Rapporti, frazioni, percentuali, proporzioni: significati, operazioni e proprietà.

Potenze, radici: significati, operazioni e proprietà.

Grandezze: significati, misura, stima, cifre significative, ordine di grandezza, arrotondamento.

Espressioni numeriche: significati, rappresentazioni, operazioni (calcolo esatto e approssimato) e proprietà, problemi.

Espressioni simboliche: significati, rappresentazioni, operazioni e proprietà, problemi.

Successioni: ricerca di regolarità, rappresentazioni numeriche e simboliche.

#### *Spazio e figure*

Le principali figure del piano e dello spazio: definizioni, relazioni tra i loro elementi (congruenza, perpendicolarità, parallelismo, ...), costruzioni, proprietà.

Segmenti (distanza punto-punto, punto-retta,...): misure con utilizzo del righello, calcoli e problemi.

Angoli (interni, esterni, opposti al vertice,...): misure con utilizzo del goniometro, calcoli e problemi.

Traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini: significati, invarianti, proprietà, problemi.

Teoremi di Pitagora e di Euclide: problemi di equivalenza.

Teorema di Talete: problemi di similitudine.

Perimetri, aree e volumi di figure del piano e dello spazio: operazioni, relazioni, somme, scomposizioni, approssimazioni.

Punti, rette, semplici parabole, semplici iperboli nel piano cartesiano: rappresentazioni, relazioni, problemi.

Rappresentazioni bidimensionali di figure nello spazio: collocazione, interpretazione spaziale, descrizione.

### *Relazioni e funzioni*

Relazioni tra oggetti matematici (numeri, figure, ...): rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà (es. perpendicolarità, ordine, proporzionalità diretta e inversa,...).

Successioni di numeri, figure, dati: ricerca di regolarità, rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà e caratteristiche.

Funzioni (lineari, quadratiche, valore assoluto, razionali fratte): significati, rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà e caratteristiche.

Zeri di una funzione: semplici equazioni, proprietà.

Segno di una funzione: semplici disequazioni, proprietà.

Relazioni tra funzioni rappresentate sul piano cartesiano: sistemi di equazioni e disequazioni.

### *Dati e previsioni*

Insiemi di dati: raccolta, organizzazione, rappresentazione.

Frequenza assoluta, relativa, percentuale: significati, calcoli, rappresentazione (tabelle, grafici, diagrammi, ...).

Campione estratto da una popolazione: determinazione casuale e non casuale.

Valori medi e misure di variabilità: calcoli, rappresentazione.

Eventi e previsioni (evento certo, possibile e impossibile, eventi disgiunti, dipendenti e indipendenti): significati, determinazione di probabilità a priori e a posteriori.

## *3.2 I processi*

I processi utilizzati per costruire le domande e analizzare i risultati sono i seguenti:

1. conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture...);
2. conoscere e utilizzare algoritmi e procedure (*in ambito aritmetico, geometrico, algebrico, statistico e probabilistico*);
3. conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (*verbale, numerica, simbolica, grafica, ...*);
4. risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico – (*individuare e collegare le informazioni utili, individuare e utilizzare procedure risolutive, confrontare strategie di soluzione, descrivere e rappresentare il procedimento risolutivo,...*);
5. riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze (*individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto,...*);
6. utilizzare forme tipiche del ragionamento matematico (*congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, dimostrare ...*);
7. utilizzare strumenti, modelli e rappresentazioni nel trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (*descrivere un fenomeno in termini quantitativi, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o*

funzioni ...).

8. riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione (*riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...*).

#### 4. Il Servizio Nazionale di Valutazione e il contesto internazionale

La definizione di competenza matematica contenuta nei documenti sull'obbligo di istruzione e richiamata nel paragrafo 2 costituisce il principale riferimento per la valutazione nelle classi seconde della scuola secondaria di secondo grado, che per le prove del 2011/12 prevede una prova uguale per tutti gli indirizzi scolastici (sistema dei licei, istruzione tecnica e istruzione professionale). Questa definizione è in continuità con quanto espresso per il primo ciclo dalle *Indicazioni per il curricolo*<sup>6</sup> ed è coerente anche con i documenti europei. In particolare, la citata Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 5 settembre 2006 sulla costituzione del Quadro Europeo delle Qualifiche e dei Titoli per l'apprendimento permanente (poi ripreso dalla Proposta di Raccomandazione del 9 aprile 2008) contiene le definizioni di conoscenze, abilità e competenze<sup>7</sup>:

- **Conoscenze:** indicano il risultato dell'assimilazione di informazioni attraverso l'apprendimento. Le conoscenze sono l'insieme di fatti, principi, teorie e pratiche, relative a un settore di studio o di lavoro; le conoscenze sono descritte come teoriche e/o pratiche.
- **Abilità:** indicano le capacità di applicare conoscenze e di usare *know-how* per portare a termine compiti e risolvere problemi; le abilità sono descritte come cognitive (uso del pensiero logico, intuitivo e creativo) e pratiche (che implicano l'abilità manuale e l'uso di metodi, materiali, strumenti).
- **Competenze:** indicano la comprovata capacità di usare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e/o personale; le competenze sono descritte in termini di responsabilità e autonomia.

Un importante riferimento internazionale per la valutazione è costituito dalla già citata indagine OCSE-PISA<sup>8</sup>. Lo schema concettuale proposto dal *framework* di OCSE-PISA può essere utile per arricchire l'analisi delle informazioni fornite dalle prove del Servizio Nazionale di Valutazione e richiami a questo quadro potranno essere inseriti nelle *Guide alla lettura*.

In tale *framework* le due direzioni della valutazione sono articolate attraverso 4 categorie di *mathematical content*, corrispondenti agli *ambiti di contenuti* di questo Quadro di Riferimento:

- *Quantity*
- *Shape and space*
- *Change and relationship*
- *Uncertainty and data*.

---

6 Decreto Ministeriale n. 139 del 22 agosto 2007 - Regolamento recante norme in materia di adempimento dell'obbligo di istruzione; Nuove Indicazioni per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione 4 settembre 2007

7 Documento reperibile all'indirizzo: <http://www.europass-italia.it/EQF.asp>

8 Alla base dell'indagine OCSE-PISA è la definizione di *mathematical literacy*, che nel *framework* per l'indagine 2012 è così esplicitata: "la capacità di un individuo di formulare, utilizzare e interpretare la matematica in una varietà di contesti. Essa include la capacità di ragionare matematicamente e di usare concetti, procedure, fatti e strumenti della matematica per descrivere, spiegare e predire fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica ha nel mondo e a formulare giudizi e decisioni ben fondati, come richiesto a cittadini costruttivi, impegnati e riflessivi". Cfr. *PISA 2012 Mathematics Framework, draft nov. 30 2010*.

La seconda dimensione con cui sono costruiti i quesiti è espressa attraverso tre momenti fondamentali dell'attività di risoluzione di un problema (chiamati *processes*): il momento della *formulazione* (*formulating*), quello dell'*utilizzo della matematica* (*employing*), e quello dell'*interpretazione* (*interpreting*).

Sottostanti a questi momenti sono una serie di *mathematical capabilities*:

- *Comunicazione*
- *Matematizzazione*
- *Rappresentazione*
- *Ragionamento e argomentazione*
- *Messa in campo di strategie per la risoluzione di problemi*
- *Utilizzo del linguaggio simbolico, tecnico e formale, e delle operazioni*
- *Utilizzo di strumenti matematici.*

Questa classificazione permette una visione complementare a quella offerta dai *processi* di questo Quadro di Riferimento.

Questa visione dell'apprendimento della matematica è anche coerente con quanto portato avanti da diversi progetti e piani di formazione nazionali e internazionali (ad esempio il piano *M@tabel*<sup>9</sup>).

## **5. Strumenti disponibili, caratteristiche generali delle prove e criteri di formulazione dei quesiti**

### *5.1 Strumenti disponibili*

Durante le prove è possibile utilizzare una calcolatrice ed è necessario disporre di strumenti da disegno (riga, squadra, compasso, goniometro). Non sono previsti, attualmente, quesiti in cui sia indispensabile disporre di una calcolatrice<sup>10</sup>, ma è consentito nelle prove per la classe seconda della secondaria di secondo ciclo l'uso di qualsiasi tipo di calcolatrice a condizione che essa NON sia quella dei telefoni cellulari e che NON sia collegabile né alla rete internet né a qualsiasi altro strumento (ad esempio, tramite bluetooth, wireless, ecc.). È possibile che per certe prove sia fornito un *formulario*.

### *5.2 Caratteristiche di quesiti e delle prove*

Le prove di Matematica sono costituite da quesiti di diverse categorie: a “risposta chiusa”, a “risposta falsa-aperta”, a “risposta aperta”, “cloze”.

La prima categoria consiste in quesiti con risposta a scelta multipla che presentano diverse alternative di risposte secondo quanto è richiesto dalla natura del quesito (attualmente sono previste 4 alternative). Una sola delle alternative di risposta è corretta.

Per quesiti a “risposta falsa-aperta” si intendono domande aperte a risposta univoca (come ad esempio il risultato di un calcolo algebrico o numerico oppure ancora l'adesione o la negazione di determinate affermazioni) che sono perciò suscettibili di una valutazione rapida e univoca.

I quesiti a “risposta aperta” possono richiedere semplici argomentazioni, giustificazioni, sequenze di calcoli. Per questi viene fornita una griglia di correzione articolata, costruita in base alle risposte ottenute nel pretest. Per queste domande è inevitabile che ci sia una certa discrezionalità nella correzione.

I quesiti di tipo “cloze” richiedono il completamento di frasi, calcoli o espressioni mediante

---

<sup>9</sup> Sito web: [http://risorsedocentipon.indire.it/offerta\\_formativa/f/index.php?action=home&area\\_t=f&id\\_ambiente=7](http://risorsedocentipon.indire.it/offerta_formativa/f/index.php?action=home&area_t=f&id_ambiente=7)

<sup>10</sup> Coerentemente con l'evoluzione delle indagini internazionali, anche le prove del Servizio Nazionale di Valutazione potranno contenere, in futuro, una parte di valutazione *computer based*.



l'utilizzo di elementi forniti nel testo.

Il tempo totale concesso per la prova del 2012 per rispondere al complesso di tutti i quesiti è di 90 minuti. Non viene assegnato punteggio negativo per le risposte sbagliate.

### 5.3 Criteri di formulazione dei quesiti

Gli estensori dei quesiti e i compilatori della prova cercano quando possibile di attenersi ai seguenti criteri:

- a) I quesiti potranno (e possibilmente dovranno) essere formulati impiegando diversi registri: testi, figure, immagini, tabelle, grafici, formule.
- b) I quesiti non saranno formulati necessariamente per valutare l'apprendimento dei *contenuti minimi o irrinunciabili*.
- c) I quesiti possono sia essere formulati in un contesto che li collega a situazioni concrete sia riguardare situazioni interne alla matematica.
- d) La formulazione dei quesiti eviterà, per quanto possibile, espressioni vaghe, ambigue o inutilmente complicate (per esempio l'uso della doppia negazione o domande con formulazione negativa).
- e) Si eviterà di proporre i quesiti più complessi all'inizio della prova.
- f) La lunghezza e la struttura delle risposte di un singolo quesito dovranno essere possibilmente omogenee.
- g) Nel caso di utilizzo di definizioni su cui non vi sia completo accordo nei libri di testo e in generale nella prassi scolastica, la definizione da utilizzare sarà richiamata nel testo del quesito o comunque nel fascicolo della prova.
- h) Sarà richiamato esplicitamente, ogni volta che sarà opportuno, il significato dei simboli; si cercherà di non utilizzare simboli non standard.
- i) I grafici e le tabelle saranno corredati da tutti gli elementi (etichette, legende,...) necessari per interpretarli e per contestualizzarli; se lo si riterrà opportuno, questi elementi potranno essere presenti anche quando non saranno strettamente necessari per rispondere al quesito.
- j) Quando in una figura geometrica o in una immagine due elementi sono congruenti, questo sarà indicato esplicitamente (nel testo o con un'adeguata e chiara simbologia sulla figura).

## 6. Strumenti per l'interpretazione della correzione delle prove e l'interpretazione dei risultati

Per ogni fascicolo di prove l'INVALSI fornirà agli insegnanti una *griglia per la correzione* in cui saranno riportate le risposte corrette per i quesiti a risposta chiusa, e delle indicazioni per la classificazione e la valutazione dei quesiti a risposta aperta. Queste indicazioni sono costruite sulla base degli esiti del pretest, ma ovviamente non potranno mai esaurire la variabilità delle risposte possibili. Si cercherà in generale di chiarire lo spirito della domanda, per aiutare gli insegnanti - autonomamente e responsabilmente - a decidere i casi dubbi.

L'INVALSI predispone anche delle *Guide alla lettura*, contenenti per ciascun item la classificazione in termini di ambito e processo prevalente, il richiamo degli obiettivi di apprendimento coinvolti (dai documenti ufficiali citati al paragrafo 2), un breve commento di natura didattica tendente a chiarire il possibile ruolo dei distrattori e sottolineare alcuni possibili comportamenti degli studenti, altre informazioni utili per capire quali indicazioni fornisce l'item in questione.

## Esempi

Gli esempi presentati sono tratti dalla prova dell'SNV del 2010/11. Vogliono esemplificare quanto esposto nei paragrafi precedenti e in particolare il tipo di ambiti e di processi che le prove vogliono valutare. Il commento è ripreso dalla *Guida Sintetica alla lettura della prova*<sup>11</sup>.

### Processo 1.

*Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture...)*

**D10.** Qual è la metà del numero  $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$  ?

- ☐ A.  $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$
- ☐ B.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$
- ☐ C.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$
- ☐ D.  $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$

**RISPOSTA CORRETTA:**

**C.**

*Percentuali di risposta*

mancata risposta	A	B	C	D
1	19,8	59,2	12,1	8,0

### AMBITO PREVALENTE

Numeri

La percentuale di risposte corrette è una delle più basse dell'intero fascicolo. Si tratta di un argomento tipico della prassi didattica della scuola secondaria di primo grado e della prima fase del primo anno di scuola secondaria di secondo grado: non stupisce quindi che la percentuale di risposte non date sia trascurabile. Invece l'elevatissima percentuale di risposte errate conferma quanto è noto alla ricerca didattica e cioè la difficoltà a lavorare simbolicamente con le potenze e, in particolare, con le potenze di numeri razionali. Gli studenti sembrano perdere il senso di quello che fanno, perché non riescono a trovare (o non cercano) strumenti di controllo. Viene richiesta anche la capacità di passare da una rappresentazione verbale (*la metà*) a una simbolica  $(1/2)$ - capacità riferibile al processo 3: per molti studenti può essere l'attivazione inadeguata di questo processo a causare l'errore.

---

<sup>11</sup> Il testo completo della *Guida alla lettura* della prova del 2010/11, a cura di Michele Impedovo, Aurelia Orlandoni e Domingo Paola è contenuto nel *Quaderno n.1-Mat*, disponibile all'indirizzo [http://www.invalsi.it/snv1011/documenti/Quaderni/Quaderni\\_SNV\\_N1\\_MAT.pdf](http://www.invalsi.it/snv1011/documenti/Quaderni/Quaderni_SNV_N1_MAT.pdf)

**Processo 2.**

*Conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico...).*

**D19.** La seguente tabella riporta il peso alla nascita, suddiviso in 4 classi, di 30 neonati:

Classi di peso (in kg)	Numero neonati
Da 1 kg e fino a 2 kg	7
Più di 2 kg e fino a 3 kg	8
Più di 3 kg e fino a 4 kg	12
Più di 4 kg e fino a 5 kg	3

Quale delle seguenti espressioni devi usare per trovare il peso medio dei 30 neonati?

- ☐ A.  $\frac{1,5 + 2,5 + 3,5 + 4,5}{30}$
- ☐ B.  $\frac{7 + 8 + 12 + 3}{4}$
- ☐ C.  $\frac{1,5 \cdot 7 + 2,5 \cdot 8 + 3,5 \cdot 12 + 4,5 \cdot 3}{30}$
- ☐ D.  $\frac{1,5 \cdot 7 + 2,5 \cdot 8 + 3,5 \cdot 12 + 4,5 \cdot 3}{4}$

**RISPOSTA CORRETTA:**

**C**

*Percentuali di risposta*

mancata risposta	A	B	C	D
2,6	14,7	14,5	59,4	8,8

**AMBITO PREVALENTE**

Dati e Previsioni

Per rispondere lo studente deve calcolare la media di una grandezza quantitativa continua di cui è nota la distribuzione di frequenza rispetto a una suddivisione in classi di uguale ampiezza.

L'opzione A non tiene conto della frequenza assoluta relativa a ogni classe; la risposta B non prende in considerazione i valori della variabile di cui si vuole la media, ma le frequenze delle varie classi; la risposta D non tiene conto del numero totale di neonati su cui è stata effettuata la statistica.

È confortante che la percentuale di risposte corrette sia relativamente elevata, su una domanda che non è banale ed è significativa nell'economia dei nuovi curricula.

**Processo 3.**

*Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica, ...)*

**D24.** La formula  $l = l_0 + k \cdot P$  esprime la lunghezza  $l$  di una molla al variare del peso  $P$  applicato.  $l_0$  rappresenta la lunghezza in centimetri “a riposo” della molla;  $k$  indica di quanto si allunga in centimetri la molla quando si applica una unità di peso. Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione: “È una molla molto lunga e molto resistente alla trazione”?

- ☐ A.  $l = 15 + 0,5 \cdot P$
- ☐ B.  $l = 75 + 7 \cdot P$
- ☐ C.  $l = 70 + 0,01 \cdot P$
- ☐ D.  $l = 60 + 6 \cdot P$

**RISPOSTA CORRETTA:**

**C**

*Percentuali di risposta*

mancata risposta	A	B	C	D
11,8	8,1	33,2	38,1	8,9

**AMBITO PREVALENTE**

Relazioni e Funzioni

Per rispondere alla domanda bisogna avere una certa confidenza con semplici modelli lineari di situazioni fisiche e saper associare, ai parametri “intercetta” e “pendenza” della funzione lineare che modella il fenomeno, le caratteristiche fisiche dell’oggetto osservato (in questo caso “lunghezza” e “resistenza alla trazione” della molla).

La scelta dell’opzione B (uno studente su 3) è probabilmente dovuta all’errata identificazione “alti valori di  $k$ , elevata resistenza alla trazione”. Sarebbe stato sufficiente ragionare sulle conseguenze di questa affermazione per scartarla. Questa domanda suggerisce una attenzione non ancora sufficiente della prassi didattica all’uso di semplici modelli. Va sottolineato peraltro che la stessa domanda, con leggere variazioni, è stata somministrata anche nella Prova nazionale dell’Esame di Stato conclusivo del primo ciclo di istruzione nell’anno scolastico 2010/11, ottenendo risultati significativamente migliori.

#### Processo 4.

*Sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,...*

**D8.** La dimensione di un televisore è la misura della diagonale dello schermo espressa in pollici (1 pollice = 2,54 cm). Nei televisori di nuova generazione il rapporto tra la larghezza e l'altezza dello schermo è 16:9.

- a. Se la larghezza dello schermo di uno di questi televisori è circa 57,5 cm, qual è all'incirca la sua altezza?

Risposta: ..... cm

- b. Da quanti pollici è il televisore?

- ☐ A. 20 pollici (= 50,80 cm)  
☐ B. 26 pollici (= 66,04 cm)  
☐ C. 28 pollici (= 71,12 cm)  
☐ D. 32 pollici (= 81,28 cm)

#### RISPOSTA CORRETTA:

**D8\_a: 32,34 cm**

Si possono accettare anche 32 cm, 32,3 cm oppure 32,343 o con ancora più cifre dopo la virgola (risposte che potrebbero essere dovute probabilmente all'uso della calcolatrice).

**D8b: B**

*Percentuali di risposta D8a*

mancata risposta	errata	corretta
27,6	30,8	41,5

*Percentuali di risposta D8b*

mancata risposta	A	B	C	D
13,6	16,8	43,4	11,7	14,5

#### AMBITO PREVALENTE

Spazio e figure

Per rispondere bisogna essere in grado di applicare il teorema di Pitagora in una situazione concreta. Non è importante sapere convertire i pollici in centimetri ed è conveniente usare la calcolatrice.

Si tratta di un problema tipico della prassi didattica della scuola secondaria di primo grado, forse meno considerato oggi nella scuola secondaria di secondo grado, anche a causa del minor tempo che si dedica alla geometria rispetto a qualche anno fa.

La percentuale di risposte corrette supera quella delle risposte errate, ma vi è una percentuale rilevante di risposte mancanti, che suggeriscono difficoltà, da parte degli studenti, nel modellizzare anche situazioni relativamente semplici e in cui il modello matematico è, per così dire, trasparente.

### Processo 5.

*Sapere riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura (saper individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, saper stimare una misura,...)*

**D23. Le dimensioni di una piazza rettangolare di una grande città sono circa  $620 \text{ m} \times 120 \text{ m}$ . Le stime comparse sui giornali sul numero di partecipanti a una manifestazione che ha riempito la piazza variano da 100 000 a oltre 1 000 000.**

**a. Sapendo che diverse fotografie scattate durante la manifestazione evidenziano una densità di circa 4 persone al metro quadro, che cosa si può concludere circa l'effettivo numero dei partecipanti?**

- ☐ A. Le stime dei giornali sono tutte errate perché dalle informazioni disponibili i partecipanti non potevano essere più di 20 000.
- ☐ B. Una stima ragionevole è di circa 300 000 partecipanti.
- ☐ C. Ha ragione chi ha parlato di più di un milione di partecipanti.
- ☐ D. La piazza non può contenere molte persone più di uno stadio, quindi c'erano meno di 150 000 partecipanti.

**b. Mostra i calcoli che hai fatto per trovare la risposta.**

.....  
.....

### RISPOSTA CORRETTA:

**D23 a: B**

**D23 b:  $4 \times 74400 = 297600$**

**oppure**

**$4 = x / (620 \cdot 120)$ , da cui  $x = 4 \cdot 74400$**

**$x = 297600$**

**oppure**

**$(620 \times 120) \times 4 = 297600$**

### Percentuali di risposta D23a

mancata risposta	A	B	C	D
17,6	18,9	46,3	7,1	10

### Percentuali di risposta D23b

mancata risposta	errata	corretta
43,6	21,6	34,8

## **AMBITO PREVALENTE**

### **Numeri**

Le opzioni A e C rievocano le stime assai differenti, effettuate da soggetti diversi, che spesso compaiono sui quotidiani. L'opzione D si basa su un assunto apparentemente ragionevole, ma che non è contenuto nel testo della domanda e che non vale in generale. Il numero consistente di mancate risposte all'item D23\_a e quello relativamente elevato di mancate risposte all'item D23\_b conferma la difficoltà degli studenti italiani a lavorare con gli ordini di grandezza e le stime numeriche. Sembra che la prassi didattica italiana abbia poco effetto su quell'importante competenza nota come *senso del numero*, ossia la capacità di effettuare stime con calcoli rapidi, anche mentali e utilizzarle come strumento di controllo in alcuni problemi di manipolazione simbolica, soprattutto agli inizi, quando si è inesperti con il calcolo simbolico.

## Processo 6.

*Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, ...)*

**D4. Considera l'affermazione: "Per ogni numero naturale  $n$ ,  $2^n + 1$  è un numero primo".  
Mostra con un esempio che l'affermazione è falsa.**

.....

.....

.....

### RISPOSTA CORRETTA:

Per mostrare che l'affermazione è falsa, basta fornire un solo esempio in cui un numero naturale  $n$  è tale che  $2n + 1$  non è un numero primo. Tale esempio viene detto *controesempio*.

Se scegliamo  $n=3$ , si ottiene  $2^3+1=9$ , che non è un numero primo.

Analogamente con  $n=5$  si ottiene  $2^5+1=33$ , che non è primo; oppure con  $n=6$  si ottiene  $2^6+1=65$ , che non è primo, ecc.

Naturalmente è sufficiente fornire un solo controesempio.

### Percentuali di risposta D4

mancata risposta	errata	corretta
38,9	18,3	42,8

### AMBITO PREVALENTE

Numeri

Il numero di risposte mancanti è rilevante: quasi il 40% non fornisce alcuna risposta a questa domanda. Fra gli studenti che rispondono 2 su 3 circa danno una risposta corretta.

L'elevato numero di risposte mancanti difficilmente dipende dalla ritrosia, già rilevata anche in altre prove, degli studenti nel fornire giustificazioni, spiegazioni, descrizioni di processi risolutivi. In questo caso, infatti, veniva richiesto solo di esibire un esempio che certificasse la falsità dell'affermazione. È quindi probabile che molti degli studenti che non hanno risposto e quelli che hanno sbagliato abbiano incontrato difficoltà con la logica del controesempio.

Per molti studenti l'affermazione è vera in alcuni casi e falsa in altri, perché perdono di vista il quantificatore universale e il suo ruolo strategico nella determinazione della valutazione di verità della proposizione, prestando solo attenzione alla proposizione aperta  $2n + 1$  è primo. Per i diversi valori di  $n$  che uno studente può facilmente provare ( $n = 0$ ;  $n = 1$ ;  $n = 2$ ;  $n = 4$ ),  $2n + 1$  è un numero primo. Ciò è sufficiente per concludere che l'affermazione non è falsa, almeno non sempre. Il quesito rischia quindi di non avere senso per molti studenti.

La logica del controesempio può essere compresa, accettata e applicata solo ponendo attenzione sul significato dei quantificatori per la valutazione del valore di verità di una proposizione. D'altra parte questa competenza (importante nella più generale preparazione scientifica degli allievi) va preparata con pazienza e con numerosi esempi e controesempi: non è inusuale ascoltare errori di questo tipo anche nei ragionamenti degli adulti.

Un modo naturale di esplorazione del problema passa per la costruzione della tabella



<b>n</b>	<b><math>2^{n+1}</math></b>
0	2
1	3
2	5
3	9
4	17
5	33
6	65
7	129
8	257
9	513
10	1025

Forse quello che manca nella pratica didattica è proprio la fase di esplorazione di un problema, cioè quella fase estremamente istruttiva (ma anche potenzialmente dispersiva) che ha lo scopo di aiutare la comprensione del problema e poi condensare le conoscenze intorno ad una strategia di soluzione.

### Processo 7.

Utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...).

**D1.** Nella tabella che vedi sono riportati i dati relativi alla distribuzione di alunni e insegnanti nella scuola secondaria di primo grado in Italia.

Aree geografiche	Scuole	Classi	Alunni (compresi i ripetenti)		Ripetenti		Insegnanti
			Maschi e femmine	Femmine	Maschi e femmine	Femmine	
<b>ITALIA</b>	7 939	82 446	1 727 339	826 869	51 407	16 199	212 041
<b>Nord</b>	3 381	33 131	711 292	339 508	19 615	5 679	86 312
<b>Centro</b>	1 358	14 656	312 700	150 098	8 066	2 508	36 570
<b>Sud</b>	3 200	34 659	703 347	337 263	23 726	8 012	89 159

Sulla base dei dati in tabella, indica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

		Vero	Falso
a.	Nel Nord gli alunni maschi sono meno delle femmine	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b.	In Italia il rapporto insegnanti/classi è inferiore a 3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c.	Nel Sud ci sono mediamente più di 10 classi per scuola	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

### Risposta corretta

a: Falso

b: Vero

c: Vero

### Percentuali di risposta D1

Item	mancata risposta	vero	falso
D1_a	0,8	10,7	88,5
D1_b	3,7	74,9	21,4
D1_c	2,1	86,7	11,2

### Ambito prevalente

Dati e previsioni

Per rispondere correttamente agli item della domanda D1 è necessario essere in grado di leggere una tabella e di eseguire semplici operazioni (sottrazioni e rapporti). È possibile evitare l'uso della calcolatrice se si è in grado di effettuare approssimazioni opportune dei numeri in gioco.

Le risposte corrette fornite ai tre item sono nettamente maggiori di quelle errate e il numero di

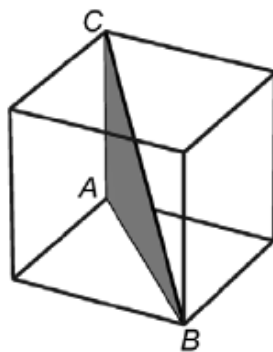
risposte mancanti si può considerare trascurabile.

D1.b è, dei tre, l'item con il minor numero di risposte corrette e il maggior numero di risposte non date: potrebbe essere un'indicazione per rafforzare nella prassi didattica il fatto che il valore numerico di un rapporto aumenta se aumenta il numeratore o se diminuisce il denominatore; la padronanza di questo fatto è davvero molto importante nello sviluppo di diversi settori della matematica e in generale della preparazione scientifica degli allievi.

**Processo 8.**

*Saper riconoscere le forme nello spazio (riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...).*

**D9.** Nella figura è rappresentato un cubo.



Il triangolo ABC ha come lati uno spigolo del cubo, la diagonale di una sua faccia e una diagonale del cubo.

a. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

		Vera	Falsa
a1.	Il lato AB è uguale al lato AC	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
a2.	Il triangolo ABC è rettangolo	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
a3.	Il lato BC è il più lungo dei tre	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
a4.	L'angolo ABC è di $45^\circ$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

b. Se lo spigolo del cubo misura 1 m, quanto misurano i lati del triangolo ABC?

AC = ..... m

AB = ..... m

BC = ..... m

**Risposta corretta**

**a1:** Falsa

**a2:** Vera

**a3:** Vera

**a4:** Falsa

**b:** AC = 1 m; AB = 2 m; BC = 3 m

Si possono accettare anche valori approssimati

AB = 1,41 m oppure AB = 1,4 m

BC = 1,73 m oppure BC = 1,7 m

## Ambito prevalente

### Spazio e figure

#### Percentuali di risposta D9a

item	mancata risposta	vero	falso
D9_a1	1,3	45,4	53,3
D9_a2	1,8	71,7	26,5
D9_a3	1,3	86,9	11,8
D9_a4	4,0	44,6	51,4

#### Percentuali di risposta D9b

mancata risposta	errata	corretta
31,1	47	21,9

L'elevata percentuale di risposte corrette agli item a\_2 e a\_3, rispetto agli item a\_1 e a\_4 suggerisce che molti studenti abbiano risposto osservando le misure dei segmenti sulla figura. Questa ipotesi è suggerita soprattutto dalla risposta errata data da molti studenti all'item a\_1 che non avrebbe dovuto comportare problemi per chi vede nella figura una rappresentazione piana di un oggetto tridimensionale, visto che si tratta di confrontare il lato di un quadrato con la sua diagonale. Si noti che gli item a\_1 e a\_4 sono equivalenti, una volta che si risponda "Vero" all'item a\_2: è naturale dunque che le percentuali di risposta siano simili. Chi ha sbagliato a\_1 (perché "vede" un triangolo isoscele con lati uguali AB e AC) sbaglia anche a\_4 perché "vede" uguali gli angoli alla base BC. Dunque la metà circa degli studenti si rappresenta mentalmente ABC come un triangolo rettangolo isoscele, non distinguendo tra il cubo (figura tridimensionale) e la sua rappresentazione piana mediante affinità e anzi affidandosi alla percezione visiva come motivazione alle risposte.

L'alto numero di risposte corrette ad a\_2 è positivo: nonostante il triangolo ABC venga trasformato nella rappresentazione piana in un triangolo ottusangolo, molti studenti riconoscono che è un triangolo rettangolo, e dunque mostrano di distinguere tra una figura tridimensionale e la sua rappresentazione. L'alto numero di risposte corrette ad a\_3 invece non è consolante, perché il lato BC resta il più lungo anche nella rappresentazione piana, e dunque buona parte delle risposte esatte potrebbero essere frutto di una percezione visiva sbagliata.

Sarebbe interessante vedere se molti studenti che hanno sbagliato la risposta all'item b) si sono limitati a misurare con il righello la misura dei segmenti AC, AB e BC.

Insieme a D2 e D3 questa domanda pone il problema della "raffigurazione mentale" di una figura.