



QUADRO DI RIFERIMENTO
PRIMO CICLO DI ISTRUZIONE
PROVA DI MATEMATICA

(IN CORSO DI REVISIONE)

Il presente documento è in corso di revisione, in relazione con le Indicazioni nazionali.

Il Quadro di riferimento è da utilizzare per la lettura e interpretazione dei dati 2014.

PREMESSA

Questo documento esplicita il Quadro di Riferimento per la costruzione della prova di matematica per il Servizio di Valutazione Nazionale dell'INVALSI per il primo ciclo di istruzione.

Presenta i principali punti di riferimento concettuali, i collegamenti con le indicazioni di legge, le idee chiave che guidano la progettazione delle prove. In particolare, esplicita

- gli ambiti della valutazione, cioè quali aspetti della matematica appresa vengono valutati;
- i modi della valutazione, ossia le caratteristiche dello strumento di valutazione.

Il QdR è definito in corrispondenza con le finalità generali dell'INVALSI che riguardano *la valutazione del sistema dell'istruzione*, ossia una valutazione dell'efficacia e dell'efficienza del sistema scolastico, globalmente inteso, a livello nazionale e per singoli settori o singole istituzioni scolastiche. Per questo motivo è stato redatto coerentemente al quadro generale nel quale sono formulati i curricula della scuola italiana, partendo dalle indicazioni di legge attualmente in vigore.

1. A chi si rivolge il Quadro di Riferimento.

Il Quadro di Riferimento si rivolge in primo luogo alle persone che propongono i quesiti e al gruppo di lavoro che li elabora, ne segue il pretest sul campo e con esso compone i fascicoli delle prove. Indica i vari aspetti dell'apprendimento da valutare e stabilisce un equilibrio tra i diversi ambiti. È quindi uno strumento che viene utilizzato nella fase preparatoria dei questionari.

Il Quadro di Riferimento è uno strumento che aiuta gli insegnanti a *interpretare i risultati* ottenuti dalle singole classi nelle prove del Servizio Nazionale di Valutazione. Le *prove INVALSI* sono progettate per la valutazione *del sistema*, ma possono costituire un elemento molto efficace se inserite nel processo di autovalutazione degli insegnanti. La comparazione dei risultati delle proprie classi o della propria istituzione scolastica con gli esiti complessivi delle prove, interpretati alla luce della conoscenza del contesto specifico in cui la propria scuola opera, può servire per individuare i punti di forza e di debolezza del percorso effettivamente realizzato in classe e delle scelte didattiche effettuate; può inoltre aiutare il coordinamento all'interno delle singole istituzioni scolastiche. I diversi *benchmark* proposti, elaborati partendo dal campione statistico, possono costituire un termine di confronto per le singole scuole o anche per i singoli insegnanti, allo scopo di condurre una riflessione autonoma (che tenga conto delle caratteristiche del contesto in cui si opera) sia sugli apprendimenti raggiunti dagli allievi (curricolo raggiunto), sia sulla validità delle scelte didattiche, sulla efficacia dell'offerta formativa e infine sulla ampiezza, profondità e coerenza del curriculum effettivamente svolto (curricolo effettivo) e sulla sua corrispondenza con il curriculum programmato.

Il Quadro di Riferimento può essere adoperato dai responsabili ai diversi livelli (Ministero dell'Istruzione, Uffici Scolastici Regionali, Dirigenti scolastici) come strumento per interpretare i risultati del sistema nel suo complesso, per poter adottare opportune strategie di intervento, ad esempio relativamente alla predisposizione di attività particolari di recupero o rafforzamento per gli allievi, o per intervenire sul curriculum programmato.

Il Quadro di Riferimento, infine, può offrire agli allievi e alle famiglie informazioni utili per capire il significato della valutazione come momento cruciale del percorso scolastico, e come momento di verifica del sistema.

Per tutti questi aspetti, una attenta analisi dei risultati delle prove somministrate potrà contribuire a fornire una guida per il miglioramento dell'offerta del sistema nel suo complesso, e di ogni singola istituzione e docente in particolare. Sarebbe al contrario un danno per l'insegnamento e per la Scuola se la prospettiva di queste prove dovesse tradursi nella preoccupazione di addestrare gli allievi ad affrontare tipologie valutative simili, senza invece curare la effettiva crescita di quel

retroterra cognitivo e culturale di cui le prove INVALSI dovrebbero rilevare e valutare l'esistenza, per poi stimolarne lo sviluppo.

2. La competenza matematica e la definizione degli obiettivi di apprendimento

L'apprendimento della matematica è una componente fondamentale nell'educazione e la crescita della persona, secondo un punto di vista che ha origini lontane e che è oggi universalmente condiviso. Nel contempo, nella società attuale la matematica è nel cuore del trattamento quantitativo dell'informazione nella scienza, nella tecnologia e nelle attività economiche e nel lavoro, e quindi la competenza matematica è un fattore fondamentale nella consapevolezza del futuro cittadino e nella sua riuscita nel mondo professionale. Interessa perciò sondare se le conoscenze che la scuola, ai diversi livelli, stimola e trasmette, sono ben ancorate ad un insieme di concetti fondamentali di base e di conoscenze stabili, almeno sui livelli essenziali. Si vuole in primo luogo valutare la conoscenza della disciplina matematica e dei suoi strumenti, intendendo tale disciplina come conoscenza concettuale, frutto cioè di interiorizzazione dell'esperienza e di riflessione critica, non di addestramento "meccanico" o di apprendimento mnemonico. Una conoscenza concettuale quindi, che affondi le sue radici in contesti critici di razionalizzazione della realtà, senza richiedere eccessi di astrazione e di formalismo. La formalizzazione matematica dovrebbe infatti essere acquisita a partire dalla sua necessità ed efficacia nell'esprimere ed usare il pensiero matematico. Gli aspetti algoritmici applicativi ed esecutivi, che pure costituiscono una componente irrinunciabile della disciplina matematica, non dovrebbero essere considerati fine a se stessi.

Visti gli obiettivi generali che sono attribuiti all'insegnamento della matematica dalle disposizioni di legge, ma più in generale dalla nostra società, nel solco di una visione della matematica profondamente radicata nella cultura, le *prove INVALSI* non devono limitarsi a valutare l'apprendimento della *matematica utile*, ma devono cercare di far riferimento alla matematica come *strumento di pensiero* e alla matematica come *disciplina con un proprio specifico statuto epistemologico*.

La definizione degli obiettivi di apprendimento nel primo ciclo di istruzione è contenuta, in questo momento, in due documenti normativi che sono uno l'evoluzione dell'altro: le Indicazioni per il curriculum (2007)¹ (DM 31 luglio 2007) e la bozza delle Indicazioni per il curriculum (2012) frutto del processo di revisione, sulla base di un monitoraggio nazionale, come disposto dalla C.M. 31 del 18 aprile 2012. La C.M. contiene le seguenti disposizioni:

- a) *procedere alla revisione delle Indicazioni nazionali per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo di istruzione per pervenire, entro il termine del 31 agosto 2012, ad un testo definitivo;*
- b) *assumere il documento "Indicazioni per il curriculum" di cui al D.M. 31 luglio 2007 come base per un lavoro di revisione e consolidamento.*

Con la C.M. 49 del 31 maggio 2012 alle scuole è stata inviata la bozza² delle Indicazioni per un ulteriore monitoraggio definitivo. In questo documento viene descritto il profilo dello studente al termine del primo ciclo nel quale sono recepite le raccomandazioni del Parlamento Europeo (2006) che descrivono la competenza matematica come *l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza delle competenze aritmetico-matematiche, l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività oltre che su quelli della conoscenza. La competenza matematica comporta, in misura*

¹ http://www.indire.it/indicazioni/templates/monitoraggio/dir_310707.pdf

² http://www.istruzione.it/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/701c1b68-2184-431a-8e1c-e281acec4ab9/indicazioni_nazionali_bozza_pubblica.pdf

variabile, la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero (pensiero logico e spaziale) e di presentazione (formule, modelli, schemi, grafici e rappresentazioni) [pag. 9].

Nello stesso documento viene descritto il profilo delle competenze che un ragazzo deve mostrare di possedere al termine del primo ciclo di istruzione che per la matematica sono così definite:

“le sue [del ragazzo] conoscenze matematiche e scientifico-tecnologiche gli consentono di analizzare dati e fatti della realtà e di verificare l’attendibilità delle analisi quantitative e statistiche proposte da altri. Il possesso di un pensiero razionale sviluppato gli consente di affrontare problemi e situazioni sulla base di elementi certi e di avere consapevolezza dei limiti delle affermazioni che riguardano questioni complesse che non si prestano a spiegazioni univoche” [pag. 10].

Nella parte specifica della matematica vengono definiti gli obiettivi di apprendimento e i traguardi per lo sviluppo delle competenze con un chiaro ed esplicito riferimento alla continuità verticale fra scuola primaria e scuola secondaria di primo grado.

Su di essi è costruita la valutazione del Servizio Nazionale di Valutazione e a essi vengono agganciati i singoli item delle prove - per permettere un corretto posizionamento del risultato della valutazione rispetto al percorso scolastico curricolare.

Per ogni domanda proposta per il Servizio Nazionale di Valutazione si cerca di stabilire un collegamento con uno o più di questi obiettivi di apprendimento e queste informazioni sono riportate nelle *Guide alla lettura*.

3. Le due dimensioni della valutazione

Le prove INVALSI di matematica per il primo ciclo scolastico sono volte a valutare le conoscenze e le abilità matematiche acquisite dagli studenti in entrata e in uscita del ciclo d’istruzione (classe II della scuola primaria; classe V della scuola primaria; classe I della scuola secondaria di primo grado; classe III della scuola secondaria di primo grado).

Le domande di matematica sono costruite in relazione a due dimensioni:

- i *contenuti matematici* coinvolti, organizzati nei quattro ambiti (Numeri, Spazio e figure, Dati e previsioni, Relazioni e funzioni);
- i *processi* coinvolti nella risoluzione.

Questa bi-dimensionalità della valutazione è utilizzata in quasi tutte le indagini internazionali³ ed è indispensabile per fotografare correttamente gli apprendimenti dello studente, individuandone le componenti strutturali.

È importante sottolineare il fatto che (in matematica) non è possibile in generale stabilire una corrispondenza univoca tra il singolo quesito e un unico contenuto (conoscenza o abilità) il cui possesso venga verificato in esclusiva mediante quello stesso quesito. Infatti, in generale, la risposta a ciascuna domanda coinvolge diversi livelli di conoscenze di vario tipo e richiede contemporaneamente il possesso di diverse abilità. È questa una conseguenza della natura stessa del pensiero matematico, che non consiste solo in convenzioni o procedure di calcolo, ma in ragionamenti complessi, fatti di rappresentazioni, congetture, argomentazioni, deduzioni.

³ In modo simile queste due dimensioni sono state analizzate nel quadro di riferimento delle prove di valutazione di TIMSS per quanto riguarda il 4° anno e l’8° anno della scuola di primo ciclo: una dimensione di contenuto in cui si specificano i domini o gli argomenti valutati in matematica (ad es. numero, algebra, geometria, dati e probabilità per l’ottavo anno di scolarità) e una dimensione cognitiva in cui vengono presentati i domini cognitivi o i processi di pensiero (conoscenza, applicazione e ragionamento). Si veda

http://www.invalsi.it/invalsi/ri/timss2011/index.php?page=timss2011_it_07

Ogni quesito delle prove del Servizio Nazionale di Valutazione viene quindi riferito a un ambito di contenuti e a un singolo processo, ma va sempre inteso che quelli indicati sono l'ambito e il processo *prevalenti*.

3.1 Gli ambiti dei contenuti

Con riferimento naturale all'organizzazione presente nelle *Indicazioni Nazionali* e nei documenti sull'obbligo di istruzione, e in continuità con il QdR per il secondo ciclo, gli ambiti dei contenuti vengono indicati con *Numeri*, *Spazio e figure*, *Dati e previsioni*, *Relazioni e funzioni*. Nella prova per la classe seconda primaria le domande sono classificate nei primi tre ambiti. L'elenco che segue vuole esplicitare i nodi concettuali attorno ai quali vengono costruite le prove.

Numeri

Numeri naturali: significati (ordinale, cardinale, ...), operazioni (calcolo esatto e approssimato) e proprietà, ordinamento, rappresentazione in base dieci, rappresentazione sulla retta.

Numeri interi: significati, operazioni (calcolo esatto e approssimato) e proprietà, ordinamento, rappresentazione in base dieci, rappresentazione sulla retta.

Numeri razionali: frazioni e numeri decimali, significati, operazioni (calcolo esatto e approssimato) proprietà, ordinamento, rappresentazione sulla retta.

Numeri pari, dispari, primi, multipli e divisori: proprietà e rappresentazioni.

Rapporti e percentuali: significati, operazioni, proprietà e rappresentazioni.

Potenze e radici: significati, operazioni e proprietà; uso delle potenze del 10 per esprimere grandezze, notazione scientifica.

Espressioni con parentesi: significati e convenzioni.

Spazio e figure

Mappe, piantine e orientamento.

Le principali figure del piano e dello spazio: definizioni, relazioni tra i loro elementi, costruzioni, proprietà.

Gli oggetti e le figure nel piano e nello spazio: rappresentazioni con riga, squadra, compasso, ...; rappresentazioni nel piano cartesiano; rappresentazioni bidimensionali di figure tridimensionali.

Unità di misure di lunghezze, aree, volumi e angoli: rappresentazioni, confronti e relazioni.

Perimetri, aree e volumi di figure del piano e dello spazio: formule, relazioni, somme, scomposizioni, approssimazioni.

Il teorema di Pitagora: proprietà e problemi.

Traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini: significati, invarianti, proprietà.

Riproduzioni in scala: ampliamenti e riduzioni.

Relazioni e funzioni

Classificazione di oggetti, figure, numeri: criteri in base a una determinata proprietà, equivalenze e ordinamenti.

Relazioni tra oggetti matematici (numeri, figure, ...): rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà (es. perpendicolarità, ordine, proporzionalità diretta e inversa,...).

Successioni di numeri, figure, dati: ricerca di regolarità, rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà e caratteristiche.

Formule contenenti lettere: interpretazione, costruzione, utilizzo, trasformazione e rappresentazioni verbali .

Funzioni del tipo $y=ax$, $y=a/x$ e $y=x^2$: significati, rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà e caratteristiche.

Equazioni di primo grado: problemi, operazioni.

Il Sistema Internazionale di misura.

Dati e previsioni

Insiemi di dati: raccolta, organizzazione, rappresentazione (tabelle, pittogrammi, istogrammi, grafici a barre, ecc.). Caratteri qualitativi e quantitativi.

Valori medi e misure di variabilità: moda, mediana e media aritmetica; campo di variazione.

Frequenza assoluta, relativa e percentuale: significati e calcoli.

Eventi e previsioni (evento certo, possibile e impossibile, eventi disgiunti, dipendenti e indipendenti): significati, determinazione di probabilità a priori e a posteriori.

3.2 I processi

I processi utilizzati per costruire le domande e analizzare i risultati sono i seguenti:

1. conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (*oggetti matematici, proprietà, strutture...*);
2. conoscere e utilizzare algoritmi e procedure (*in ambito aritmetico, geometrico, ...*);
3. conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (*verbale, numerica, simbolica, grafica, ...*);
4. risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico – (*individuare e collegare le informazioni utili, individuare e utilizzare procedure risolutive, confrontare strategie di soluzione, descrivere e rappresentare il procedimento risolutivo,...*);
5. riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze (*individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, stimare una misura,...*);
6. acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (*congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, ...*);
7. utilizzare strumenti, modelli e rappresentazioni nel trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (*descrivere un fenomeno in termini quantitativi, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni ...*).
8. riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione (*riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme,*

immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...).

4. Strumenti disponibili, caratteristiche generali delle prove e criteri di formulazione dei quesiti

4.1 Strumenti disponibili

Non sono previsti, attualmente, quesiti in cui sia indispensabile disporre di una calcolatrice, e sarà indicato volta per volta se durante le prove è possibile utilizzarla, e per quali domande. È possibile che per certe prove sia fornito un *formulario*. È necessario disporre di strumenti da disegno (riga, squadra, compasso, ...) e di misura (goniometro, righello, ...).

4.2 Caratteristiche di quesiti e delle prove

Le prove di Matematica sono costituite da quesiti di diverse categorie: a “risposta chiusa”, a “risposta falsa-aperta”, a “risposta aperta”, “cloze”.

La prima categoria consiste in quesiti con risposta a scelta multipla che presentano diverse alternative di risposte secondo quanto è richiesto dalla natura del quesito (attualmente sono previste 3 alternative per la prova di seconda primaria e 4 per le altre prove). Una sola delle alternative di risposta è corretta.

Per quesiti a “risposta falsa-aperta” si intendono domande aperte a risposta univoca (come ad esempio il risultato di un calcolo algebrico o numerico oppure ancora l’adesione o la negazione di determinate affermazioni) che sono perciò suscettibili di una valutazione rapida e univoca.

I quesiti a “risposta aperta” possono richiedere semplici argomentazioni, giustificazioni, sequenze di calcoli.

I quesiti di tipo “cloze” richiedono il completamento di frasi, calcoli o espressioni mediante l'utilizzo di elementi forniti nel testo.

Non viene assegnato punteggio negativo per le risposte sbagliate.

4.3 Criteri di formulazione dei quesiti

Gli estensori dei quesiti e i compilatori della prova cercano quando possibile di attenersi ai seguenti criteri:

- a) I quesiti potranno (e possibilmente dovranno) essere formulati impiegando diversi registri: testi, figure, immagini, tabelle, grafici, formule.
- b) I quesiti non saranno formulati necessariamente per valutare l'apprendimento dei *contenuti minimi o irrinunciabili*.

- c) I quesiti possono sia essere formulati in un contesto che li collega a situazioni concrete sia riguardare situazioni interne alla matematica.
- d) La formulazione dei quesiti eviterà, per quanto possibile, espressioni vaghe, ambigue o inutilmente complicate (per esempio l'uso della doppia negazione o domande con formulazione negativa).
- e) Si eviterà di proporre i quesiti più complessi all'inizio della prova.
- f) La lunghezza e la struttura delle risposte di un singolo quesito dovranno essere possibilmente omogenee.
- g) Nel caso di utilizzo di definizioni su cui non vi sia completo accordo nei libri di testo e in generale nella prassi scolastica, la definizione da utilizzare sarà richiamata nel testo del quesito o comunque nel fascicolo della prova.
- h) Sarà richiamato esplicitamente, ogni volta che sarà opportuno, il significato dei simboli; si cercherà di non utilizzare simboli non standard.
- i) I grafici e le tabelle saranno corredati da tutti gli elementi (etichette, legende,...) necessari per interpretarli e per contestualizzarli; se lo si riterrà opportuno, questi elementi potranno essere presenti anche quando non saranno strettamente necessari per rispondere al quesito.
- j) Quando in una figura geometrica o in una immagine due elementi sono congruenti, questo sarà indicato esplicitamente (nel testo o con un'adeguata e chiara simbologia sulla figura).

5. Strumenti per l'interpretazione della correzione delle prove e l'interpretazione dei risultati

Per ogni fascicolo di prove l'INVALSI fornirà agli insegnanti una *griglia per la correzione* in cui saranno riportate le risposte corrette per i quesiti a risposta chiusa, e delle indicazioni per la classificazione e la valutazione dei quesiti a risposta aperta. Queste indicazioni sono costruite sulla base degli esiti del pretest, ma ovviamente non potranno mai esaurire la variabilità delle risposte possibili. Si cercherà in generale di chiarire lo spirito della domanda, per aiutare gli insegnanti - autonomamente e responsabilmente - a decidere i casi dubbi.

L'INVALSI predispone anche delle Guide alla lettura, contenenti per ciascun item la classificazione in termini di ambito e processo prevalente, il richiamo degli obiettivi di apprendimento coinvolti (dai documenti ufficiali citati al paragrafo 2), un breve commento di natura didattica tendente a chiarire il possibile ruolo dei distrattori e sottolineare alcuni possibili comportamenti degli studenti, altre informazioni utili per capire quali indicazioni fornisce l'item in questione.

Esempi

Gli esempi presentati sono tratti dalle prove dell'SNV dell'a.s. 2011/12. Vogliono esemplificare quanto esposto nei paragrafi precedenti e in particolare il tipo di ambiti e di processi che le prove vogliono valutare. Il commento è ripreso dalle *Guida alla lettura* delle prove dei diversi livelli scaricabili dal sito INVALSI.

Processo 1 - Conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture...)

Classe seconda primaria

**D6. Carlotta ha 6 anni, la metà degli anni di suo fratello Roberto.
Quanti anni ha Roberto?**

Risposta: anni

Risposta corretta: 12 o 12 anni o dodici o dodici anni

RISULTATI DEL CAMPIONE

errata	corretta	Non risponde
57,9	35,7	6,1

AMBITO PREVALENTE: Numeri

COMMENTO

L'alunno deve interpretare correttamente il testo del problema e la consegna e calcolare quindi il doppio di 6.

Possibile errore: 3 (errata interpretazione del testo e quindi calcolo della metà di 6, invece del doppio)

Classe quinta primaria

D7. Fai una crocetta sul numero che si avvicina di più a quello scritto a parole:

a. un decimo

- A. ☐ 10
- B. ☐ 0,09
- C. ☐ 0,01
- D. ☐ 0,15

b. sette centesimi

- A. ☐ 700
- B. ☐ 6,07
- C. ☐ 0,08
- D. ☐ 7

Risposta corretta:

D7a: B

D7b: C

RISULTATI DEL CAMPIONE

	A	B	C	D	Non risponde
D7a	21,8	43,2	17,4	16,4	1,0
D7b	17,5	20,0	49,5	11,4	1,5

AMBITO PREVALENTE: Numeri**COMMENTO**

Il quesito richiede particolare attenzione alla consegna e implica una conoscenza sicura sul valore posizionale dei numeri decimali.

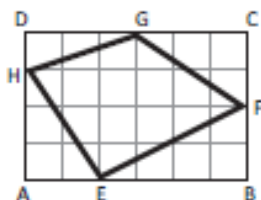
Lo studente deve aver compreso la notazione posizionale di un numero decimale. I distrattori corrispondono ad errori comuni che mettono in luce difficoltà molto frequenti

La scelta del distrattore A, in entrambi gli item, può indicare una conoscenza ancora molto fragile del sistema decimale (decimo confuso con decina e centesimo con centinaio)

Processo 2 - Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure (*in ambito aritmetico, geometrico, ...*)

Classe prima secondaria di 1° grado

D15. In figura è rappresentato il quadrilatero EFGH i cui vertici sono sui lati del rettangolo ABCD. Le dimensioni del rettangolo sono 4 m e 6 m.



Quanto misura l'area del quadrilatero EFGH?

- A. ☐ 11 m²
 B. ☐ 11,5 m²
 C. ☐ 12 m²
 D. ☐ 12,5 m²

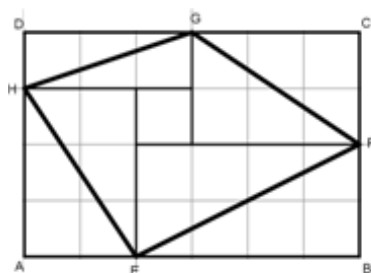
Risposta corretta: D

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	D	Non risponde
20,4	23,7	34,7	14,1	6,9

AMBITO PREVALENTE: Spazio e figure**COMMENTO**

Il modo forse più semplice per risolvere questo quesito è scomporre il rettangolo in 4 triangoli come in figura.



Calcolare poi le aree dei triangoli e sommarle tra loro aggiungendo il quadrato centrale ($1,5 + 3 + 3 + 4 + 1$).

Un'altra strategia è rappresentata dalla individuazione dell'area del rettangolo (24 cm^2) a cui togliere le aree di triangoli ($24 - 11,5 = 12,5$).

Classe terza secondaria di primo grado

E2. Indica se le uguaglianze in tabella sono vere (V) o false (F).

		V	F
a.	$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{5}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b.	$\sqrt{3+2} = \sqrt{5}$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c.	$\sqrt{3^2} + \sqrt{2^2} = 5$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d.	$\sqrt{3^2 + 2^2} = 5$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Risposta corretta: F V V F

RISULTATI DEL CAMPIONE

	V	F	Non risponde
E2a	24,5	74,0	1,4
E2b	91,3	7,8	0,8
E2c	56,6	42,0	1,1
E2d	15,0	83,6	1,3

AMBITO PREVALENTE: Numeri

COMMENTO

Lo studente deve riconoscere le proprietà dell'operazione di radice quadrata. L'item c risulta per gli studenti il più complesso in quanto probabilmente non mettono in relazione l'operazione di radice quadrata con il suo inverso (elevamento al quadrato).

Processo 3 - Conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (verbale, numerica, simbolica, grafica, ...);

Prima secondaria di primo grado

D8. A ogni compleanno, la nonna regala a Mario una somma di denaro in euro uguale a 5 volte l'età che compie. Quest'anno, oltre al solito regalo, la nonna dà a Mario 10 euro in più. Se N è il numero di anni che Mario compie quest'anno, quale delle seguenti formule esprime la somma ricevuta da Mario?

- A. ☐ $10N + 5$
B. ☐ $5N + 10$
C. ☐ $N + 10$
D. ☐ $N + 15$

Risposta corretta: B

RISULTATI DEL CAMPIONE

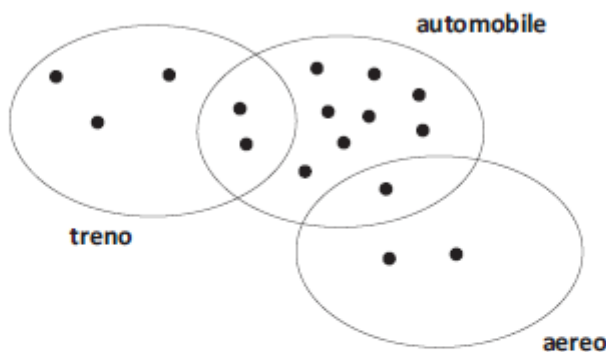
A	B	C	D	Non risponde
13,9	47,3	18,7	16,7	3,3

AMBITO PREVALENTE: Relazioni e funzioni

COMMENTO

Lo studente deve saper passare dal linguaggio verbale al linguaggio simbolico. La risposta A considera come coefficiente della N il 10 invece del 5, mentre la C individua gli studenti che non moltiplicano la N per 5 e la risposta D coloro che sommano i due numeri interi (10 e 5) alla N . Una attività in classe su questo quesito potrebbe essere quella di tradurre in linguaggio verbale le risposte A, C e D e confrontarle con il testo della domanda.

- D2. Gli alunni della V B, al rientro dalle vacanze estive, costruiscono questo diagramma per rappresentare i mezzi di trasporto che hanno utilizzato per recarsi in villeggiatura. Ciascun pallino nero rappresenta un alunno.



Indica se le seguenti affermazioni sono vere (V) o false (F). Metti una crocetta per ogni riga.

	V	F
a. Gli alunni che hanno utilizzato l'automobile sono 8	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b. 2 alunni hanno utilizzato sia il treno sia l'automobile	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c. Gli alunni che hanno utilizzato un solo mezzo di trasporto sono 14	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d. Nessun alunno ha utilizzato tre mezzi di trasporto	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Risposta corretta: F V F V

RISULTATI DEL CAMPIONE

	V	F	Non risponde
D2a	52,8	46,8	,3
D2b	78,3	21,4	,2
D2c	4,3	95,2	,5
D2d	68,1	31,2	,6

AMBITO PREVALENTE: Dati e previsioni

COMMENTO

Per rispondere lo studente deve saper interpretare una rappresentazione grafica di insiemi. In particolare deve riconoscere che l'intersezione tra insiemi rappresenta gli alunni che hanno utilizzato più mezzi di trasporto.

Processo 4 - Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico – (individuare e collegare le informazioni utili, individuare e utilizzare procedure risolutive, confrontare strategie di soluzione, descrivere e rappresentare il procedimento risolutivo,...);

Classe seconda primaria

D15. Osserva l'operazione:

$$7 + 7 + 6 =$$

Quale tra i seguenti problemi si può risolvere con l'operazione nel riquadro?

- A. ☐ Mattia ha 7 figurine e Giorgio ha 6 figurine. Quante figurine hanno insieme Mattia e Giorgio?
- B. ☐ Mattia ha 7 figurine e Giorgio ha 6 figurine in più di Mattia. Quante figurine hanno insieme Mattia e Giorgio?
- C. ☐ Mattia ha 7 figurine e Giorgio ha 6 figurine. Quante figurine ha Mattia in più di Giorgio?

Risposta corretta: B

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	Non risponde
20,3	43,5	28,4	5,2

AMBITO PREVALENTE: Numeri

COMMENTO

L'alunno deve essere in grado di dare un senso ad un'addizione, abbinandola a una situazione problematica adatta.

Nella risposta A trascurano un addendo.

Nella risposta C, oltre a trascurare un addendo, si aggiunge la scorretta interpretazione della locuzione "in più".

Classe prima secondaria di primo grado

D17. Marco vuole preparare una torta al cioccolato per il suo compleanno. La ricetta dice che occorrono 600 g di cioccolato. Al supermercato vendono tavolette di cioccolata da 250 g l'una.

- a. Qual è il numero minimo di tavolette di cioccolata che Marco deve comprare?

Risposta:

- b. Se ogni tavoletta è formata da 10 quadretti, quanti quadretti di cioccolata servono a Marco per preparare la torta?



Risposta:

- c. Scrivi come hai fatto per trovare la risposta.

.....

.....

.....

Risposte corrette

D17a: 3

D17b: 24 o 24 quadretti

D17c:

- $250 : 10 = 25$ $600 : 25 = 24$
- Ho disegnato 3 tavolette divise in 10 parti e visto che ogni parte è 25 g ho contato fino ad arrivare a 600.

RISULTATI DEL CAMPIONE

	errata	corretta	Non risponde
D17a	36,2	58,6	5,0
D17b	70,9	18,7	10,1
D17c	68,3	13,5	17,6

AMBITO PREVALENTE: Relazioni e funzioni

COMMENTO

Nella domanda D17a. lo studente deve calcolare quante tavolette intere occorrono per avere 600 g di cioccolata e quindi deve trovare il multiplo di 250 più vicino e maggiore di 600 .

Diverse sono le strategie possibili per risolvere le domande b. e c. Si può dividere 600 per 250 e moltiplicare per 10, oppure si può dividere la quantità di cioccolata occorrente per il peso di ogni quadretto di cioccolata

$$\frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{4}{10} = \frac{24}{10}$$

oppure si possono utilizzare le frazioni $\frac{10}{10} + \frac{10}{10} + \frac{4}{10} = \frac{24}{10}$.

Questo quesito si presta ad una discussione in classe sulle diverse strategie che si possono utilizzare per la sua risoluzione.

Processo 5 - riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze (*individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, stimare una misura,...*).

Classe quinta primaria

D13. Questa è la fotografia del modellino di una barca a vela.



Lo scafo del modellino è lungo 16 cm. Lo scafo della barca reale è lungo 16 m.
Qual è la scala del modellino?

- A. ☐ 1 : 1
B. ☐ 1 : 10
C. ☐ 1 : 50
D. ☐ 1 : 100

Risposta corretta: D

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	D	Non risponde
7,5	20,6	14,3	53,4	4,1

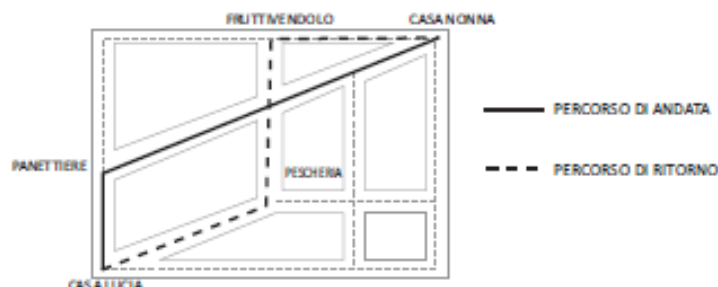
AMBITO PREVALENTE: Relazioni e funzioni

COMMENTO

Il quesito richiede conoscenze e linguaggio specifici. Non è usuale la richiesta di individuare la scala utilizzata; in genere si propongono situazioni in cui è richiesto, data la scala, di calcolare le misure reali di un oggetto raffigurato o le misure della rappresentazione, dato l'oggetto.

Classe prima secondaria di primo grado

- D7. Lucia esce da casa sua, va a comprare il pane per la nonna e glielo porta a casa. Al ritorno, fa un'altra strada e si ferma prima dal fruttivendolo e poi in pescheria per fare alcuni acquisti per la mamma. Nella mappa in figura sono rappresentati i percorsi fatti da Lucia per andare e tornare da casa sua a casa della nonna.



Nel percorso di ritorno Lucia fa più strada rispetto all'andata? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

- ☐ Sì, perché
-
-
- ☐ No, perché
-
-

Risposta corretta:

Lo studente fa riferimento al fatto che al ritorno per un tratto percorre due lati di un triangolo invece di uno come all'andata (o risposte equivalenti), oppure fa riferimento diretto alle misure dei due percorsi.

RISULTATI DEL CAMPIONE

errata	corretta	Non risponde
81,9	12,8	4,3

AMBITO PREVALENTE: Spazio e figure

COMMENTO

Lo studente può utilizzare due diverse strategie per confrontare i due percorsi: può utilizzare il righello e misurare il percorso dell'andata e quello del ritorno e vedere quale è il più lungo. Oppure

può far riferimento alla proprietà dei triangoli per la quale ogni lato è minore della somma degli altri due. I due percorsi hanno, infatti, una parte uguale (il parallelogramma) e un'altra che nel percorso di andata è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, nel percorso di ritorno sono i due cateti la cui somma è sempre maggiore dell'ipotenusa

Il quesito si presta ad una attività in classe di confronto di strategie.

Processo 6 - Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (*congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, ...*);

Classe seconda primaria

D2. Osserva la sequenza di numeri:

3 6 12 24

In questa sequenza si passa da un numero a quello che viene dopo sempre con la stessa regola.

Quale può essere la regola?

- A. ☐ Si aggiunge 3
- B. ☐ Si fa il doppio
- C. ☐ Si aggiunge 6

Risposta corretta: B

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	Non risponde
25,7	61,5	10,4	2,2

AMBITO PREVALENTE: Numeri

COMMENTO

L'alunno deve individuare la regola che determina una sequenza di numeri, mettendo ogni numero della sequenza in relazione con il successivo.

Nella risposta A l'attenzione si concentra solo sulla prima coppia di numeri (3 e 6).

Nella risposta C l'attenzione è posta sulla coppia centrale di numeri (6 e 12).

Classe terza secondaria di primo grado

E5. Se a è un numero dispari, quale delle seguenti affermazioni, relative a $3(a+1)$, è corretta?

- A. ☐ $3(a+1)$ è dispari, perché il triplo di un numero è dispari
- B. ☐ $3(a+1)$ è dispari, perché il prodotto di due numeri dispari è dispari
- C. ☐ $3(a+1)$ può essere pari o dispari, perché, per esempio, $3 \times 2 = 6$ e $3 \times 5 = 15$
- D. ☐ $3(a+1)$ è pari, perché $(a+1)$ è un numero pari

Risposta corretta: D

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	D	Non risponde
6,3	10,7	24,3	57,1	1,5

AMBITO PREVALENTE: Relazioni e funzioni

COMMENTO

Lo studente deve scegliere una argomentazione corretta fra quattro date. Si tratta di interpretare una scrittura algebrica e di richiamare i concetti di pari/dispari e di successivo. Il 57,1% degli studenti risponde correttamente (risposta corretta: D) e il 24,3% sceglie l'opzione C che è l'unica giustificazione che presenta esempi numerici, che in genere hanno una "forza argomentativa" piuttosto notevole per gli studenti. La percentuale di omissioni è molto bassa, ma questo è probabilmente dovuto alla tipologia della domanda (a scelta multipla). Nel quesito E5 il 24,3% di studenti sceglie l'opzione C non tenendo conto dell'ipotesi iniziale (a numero dispari) e del fatto che il successivo ($a+1$) è pari; la catena argomentativa dovrebbe esplicitarsi nel seguente modo: *se a è dispari, $a+1$, che è il successivo di a deve essere pari, pertanto il triplo di un pari è sempre pari.* E' in gioco l'interpretazione del significato di scritture algebriche.

Processo 7 - Utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (*descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...*).

Classe quinta primaria

D6. Luciana desidera trascorrere qualche giorno al mare a Rimini. Consulta l'orario dei treni e decide di prendere il treno che ci mette meno tempo.

Stazione di partenza: Roma Termini Stazione di arrivo: Rimini		
	Partenza	Arrivo
1	11:28 ROMA TERMINI	17:03 RIMINI
2	13:58 ROMA TERMINI	18:14 RIMINI
3	16:30 ROMA TERMINI	20:51 RIMINI
4	18:30 ROMA TERMINI	22:07 RIMINI

Quale treno prenderà Luciana?

- A. ☐ Il treno 1
B. ☐ Il treno 2
C. ☐ Il treno 3
D. ☐ Il treno 4

Risposta corretta: D

RISULTATI DEL CAMPIONE

A	B	C	D	Non risponde
17,7	9,2	17,2	55,2	0,6

AMBITO PREVALENTE: Dati e previsioni

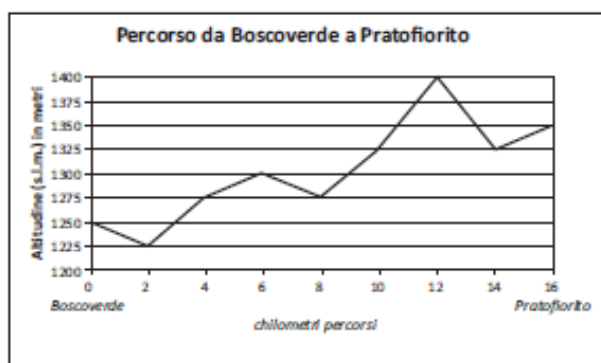
COMMENTO

Il quesito richiede conoscenza delle misure di tempo e correttezza nel calcolo.

Lo studente deve operare con misure di tempo, può fare una sottrazione oppure può impiegare *altre* strategie, ad esempio aggiungere ore e minuti all'orario di partenza fino a raggiungere l'orario di arrivo.

Classe prima secondaria di primo grado

- D5. Giulio è in vacanza in montagna a *Boscoverde*. Decide di fare una gita in bicicletta fino al vicino paese di *Pratofiorito*. Il seguente grafico mostra come varia l'altitudine lungo il percorso tra *Boscoverde* (km 0) e *Pratofiorito* (km 16).



- a. Qual è la differenza di altitudine tra la quota massima e la quota minima raggiunte da Giulio durante il percorso da *Boscoverde* a *Pratofiorito*?
- A. ☐ 125 m
- B. ☐ 150 m
- C. ☐ 175 m
- D. ☐ 200 m
- b. Quanti chilometri di strada in salita Giulio ha fatto da *Boscoverde* a *Pratofiorito*?
- Risposta: km
- c. Se al ritorno da *Pratofiorito* a *Boscoverde* Giulio percorre la stessa strada, quanti chilometri in salita deve fare?
- Risposta: km

Risposta corretta

D5a: C

D5b: 10

D5c: 6

RISULTATI DEL CAMPIONE

	A	B	C	D	Non risponde
D5a	10,8	21,3	53,9	9,2	4,4

	errata	corretta	Non risponde
D5b	68,9	21,7	9,3
D5c	62,5	25,5	11,9

AMBITO PREVALENTE: Dati e previsioni

COMMENTO

D5a - Lo studente deve leggere sul grafico la quota più alta raggiunta da Giulio (1400 m) e quella più bassa (1225 m) e poi effettuare la differenza. Oppure può contare il numero di tacche compreso tra 1225 e 1400 e moltiplicare per 25. Le altre tre risposte corrispondono a risultati ottenuti leggendo i dati in modo errato.

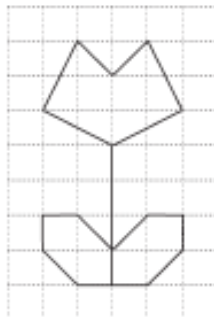
D5b - La difficoltà non sta nel riconoscere quali segmenti del grafico rappresentano la salita, ma nel leggere in modo corretto i numeri sull'asse x. Un errore potrebbe essere rispondere 12 perché il punto più alto corrisponde a 12 km.

D5c - Per rispondere a questa domanda innanzitutto lo studente deve capire che la salita del ritorno corrisponde alla discesa dell'andata. Quindi può utilizzare due possibili strategie: o calcola la differenza tra i chilometri totali (16) e quelli dell'andata (10), oppure legge sul grafico i chilometri corrispondenti ai tratti in discesa dell'andata.

Processo 8 - Riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione (*riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...*).

Classe seconda primaria

D8. Osserva questo disegno:



Con due di questi pezzi puoi ricostruirlo.



Pezzo A



Pezzo B



Pezzo C



Pezzo D

Quali sono i due pezzi?

Risposta: e

Risposta corretta: A e D oppure **Pezzo A e Pezzo D.**

RISULTATI DEL CAMPIONE

errata	corretta	Non risponde
42,3	54,9	1,7

AMBITO PREVALENTE: Spazio e figure

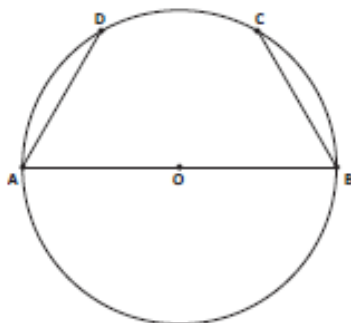
COMMENTO

L'alunno deve riconoscere le due parti simmetriche di una figura per poterla ricostruire correttamente.

Si tratta di un problema di rappresentazione di simmetrie in cui è necessario muovere mentalmente gli oggetti: per ricostruire il disegno, occorre scambiare la posizione dei pezzi A e D rispetto a come sono proposti nella domanda.

Classe terza secondari di secondo grado

E12. La circonferenza in figura ha il diametro di 10 cm e le corde AD e BC uguali al raggio.



a. Qual è il perimetro del quadrilatero ABCD?

Risposta: cm

b. Giustifica la tua risposta.

.....

.....

.....

Risposta corretta

E12a 25

E12b - Nella risposta deve essere esplicitato che il segmento DC è uguale al raggio.

Esempi di risposte corrette:

- DC è un raggio
- CB è uguale al raggio e forma un triangolo equilatero COB e quindi DC è anche lui uguale al raggio
- DC è uguale a 5 cm e quindi $10 + 5 + 5 + 5 = 25$ cm
- Ho misurato e ho visto che DC ha la stessa misura di CB.
- Perché COB e COD e ADO sono triangoli equilateri.
- Anche $DC = 5$ cm
- ... altre risposte equivalenti

RISULTATI DEL CAMPIONE

	errata	corretta	Non risponde
E12a	21,9	60,8	17,0
E12b	30,0	42,0	27,4

AMBITO PREVALENTE: Spazio e figure

COMMENTO

Lo studente deve “vedere” il trapezio ABCD unendo fisicamente o virtualmente gli i punti D e C.

Per rispondere correttamente deve cogliere che il segmento DC è uguale al raggio, e quindi misura 5 cm.

L'item b riguarda un altro processo, ma naturalmente il “saper vedere” una figura geometrica, eventualmente “modificare” una figura magari tracciando un segmento ausiliario può rendere più facile il passaggio alla giustificazione.